ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

OUTHONG PHONEPASEUTH

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU METRIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

---------------------📖---------------------

OUTHONG PHONEPASEUTH

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU METRIC

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Outhong PHONEPASEUTH

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 06 năm 2018

Tác giả

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN	ii
MỤC LỤC	iii
MỞ ĐẦU	1
1. Lý do chọn đề tài	1
2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu	1
3. Phương pháp nghiên cứu	2
4. Bố cục luận văn	2
Chương 1. KHÔNG GIAN KIỂU METRIC	3
1.1. Không gian metric	3
1.2. Không gian kiểu metric	4
1.3. Định lý Banach trong không gian kiểu metric	11
Chương 2. ĐỊNH LÝ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU METRIC	17
2.1. Điểm bất động của ánh xạ trong không gian kiểu metric compact theo dãy	17
2.2. Điểm bất động trong không gian kiểu metric sắp thứ tự	28
2.3. Điểm bất động trong không gian metric nón	31
2.4. Điểm bất động trong không gian kiểu metric đầy đủ	33
2.5. Sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân	37
KẾT LUẬN	40
TÀI LIỆU THAM KHẢO	41

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Như đã biết, nguyên lí về ánh xạ co đã được phát biểu và chứng minh trong công trình của Banach năm 1922 là một trong những định lý quan trọng nhất của giải tích hàm cổ điển. Về sau các nhà toán học đã mở rộng nguyên lý này cho nhiều loại ánh xạ trên các không gian khác nhau, đặc biệt là các không gian kiểu metric. Bởi vậy nguyên lý ánh xạ co Banach được xem là khởi nguồn cho các nghiên cứu về lý thuyết điểm bất động trong các không gian kiểu metric. Ý nghĩa của nó nằm ở chỗ nó có thể được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực của toán học. Các kết quả nghiên cứu về điểm bất động cũng như điểm bất động chung của các ánh xạ thỏa mãn điều kiện co metric đã biết thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Trong những năm gần đây, một số tác giả đã đạt được nhiều kết quả về điểm bất động và điểm bất động chung đối với các lớp ánh xạ khác nhau trên các không gian metric tổng quát như Bakhtin, Czerwik, Khamsi, Hussain, Edelstein, Suzuki… Ở đây chúng tôi sẽ tập trung vào một trong những không gian đó. Cụ thể hơn, đó là không gian kiểu metric, hay còn gọi là không gian $b-$metric

Do đó tôi chọn đề tài: "*Định lý điểm bất động trên không gian kiểu metric* ".

Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày một số kết quả về điểm bất động trên các không gian kiểu metric.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Trình bày tổng quan và hệ thống một số kết quả về không gian metric, không gian kiểu metric và một số định lý điểm bất động trên các không gian đó, bao gồm điểm bất động của ánh xạ trong không gian kiểu metric compact dãy, điểm bất động trong không gian kiểu metric được sắp thứ tự, điểm bất động trong không gian metric nón, điểm bất động trong không gian kiểu metric đầy đủ. Cuối cùng là áp dụng kết quả đạt được vào xét sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp của giải tích hàm.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [1], [4], [8] và [10], gồm 42 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống một vài kết quả về không gian metric, không gian kiểu metric và một số định lý điểm bất động trên các không gian đó.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày lại các kết quả nghiên cứu gần đây của M. Cosentino, P. Salimi và P. Vetro về điểm bất động của ánh xạ trong không gian kiểu metric compact dãy, điểm bất động trong không gian kiểu metric thứ tự, điểm bất động trong không gian metric nón, điểm bất động trong không gian kiểu metric đầy đủ. Cuối cùng là áp dụng kết quả đạt được vào xét sự tồn tại nghiệm của phương trình tích phân.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1. KHÔNG GIAN KIỂU METRIC

1.1. Không gian metric

Định nghĩa 1.1.1. Cho $X \neq \varnothing$ là một tập hợp tùy ý. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn các điều kiện sau:

$a)$ $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X;\; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

$b)$ $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X.$

$c)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in X.$

Khi đó d được gọi là metric hay khoảng cách trên $X.$ Cặp (X,d) gọi là không gian metric. Mỗi phần tử của X được gọi là một điểm, $d(x,y)$ gọi là khoảng cách giữa hai điểm x và y.

Sau đây là một vài tính chất của metric:

Mệnh đề 1.1.2.

$a)$ *Nếu* $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ *thì*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

$b)$ *Với mọi* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ *ta có:*

$$\left| d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2) \right| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2).$$

Định nghĩa 1.1.3. Cho không gian metric (X,d), $\{x_n\}$ là một dãy trong X và $x \in X.$ Ta nói dãy phần tử $\{x_n\}$ hội tụ về phần tử x nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ hay $x_n \xrightarrow{\ d\ } x$.

Sau đây là một vài tính chất của dãy hội tụ:

Mệnh đề 1.1.4.

$a)$ *Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.*

$b)$ *Nếu* $\{x_n\} \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về* x.

$c)$ *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a,b)$.

Định nghĩa 1.1.5. Dãy $\{x_n\}$ trong không gian metric X gọi là dãy Cauchy nếu $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Định nghĩa 1.1.6. Không gian metric X gọi là đầy đủ nếu mọi dãy Côsi trong X đều hội tụ.

1.2. Không gian kiểu metric

Định nghĩa 1.2.1 Cho X là một tập khác rỗng và $d : X \times X \to [0,+\infty)$. (X,d) là không gian đối xứng (còn gọi là $E-$không gian) nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$a)$ $d(x,y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$;

$b)$ $d(x,y) = d(y,x)$ với mọi $x, y \in X$.

Không gian đối xứng khác không gian metric vì không có bất đẳng thức tam giác. Tuy nhiên, nhiều khái niệm có thể được định nghĩa giống như những khái niệm trong không gian metric. Ví dụ, trong không gian đối xứng (X,d) điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$ được định nghĩa bởi

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0 \text{ nếu và chỉ nếu } \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là dãy Cauchy nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số nguyên dương $n(\varepsilon)$ sao cho $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ với mọi $m, n \geq n(\varepsilon)$.

Không gian đối xứng (X,d) được gọi là đầy đủ nếu và chỉ nếu mỗi dãy Cauchy của nó hội tụ về một phần tử $x \in X$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho X là một tập khác rỗng và $K \geq 1$ là số thực cho trước. Hàm số $d: X \times X \to [0,+\infty)$ được gọi là kiểu metric (hay $b-$metric) nếu và chỉ nếu với mọi $x,y,z \in X$ các điều kiện sau được thỏa mãn:

$a)$ $d(x,y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$;

$b)$ $d(x,y) = d(y,x)$;

$c)$ $d(x,y) \leq K\left[d(x,z) + d(z,y)\right]$.

Bộ ba (X,d,K) gọi là không gian kiểu metric hay không gian $b-$metric.

Khi $K = 1$, ta có $(X,d,1)$ là không gian metric.

Chú ý rằng không gian kiểu metric bao hàm trong lớp các không gian đối xứng. Vì vậy, các khái niệm dãy hội tụ, dãy Cauchy và không gian đầy đủ được định nghĩa như trong không gian đối xứng. Không gian kiểu metric (X,d,K) gọi là compact theo dãy nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ trong X, đều tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$, hội tụ đến một điểm $x \in X$.

Sau đây là một vài ví dụ về không gian kiểu metric.

Ví dụ 1.2.3. Cho $X = [0,1]$ và $d: X \times X \to [0,+\infty)$ được xác định bởi $d(x,y) = (x-y)^2$, với mọi $x,y \in X$. Khi đó $(X,d,2)$ là một không gian kiểu metric .

Ví dụ 1.2.4. Cho $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R},\ \| f \|_\infty = \sup\limits_{x\in X} | f(x) | < +\infty\}$ và $\| f \| = \sqrt[3]{\| f^3 \|_\infty}$. Hàm $d: C_b(X) \times C_b(X) \to [0,+\infty)$ xác định bởi

$$d(f,g) = \| f - g \| \text{ với mọi } f,g \in C_b(X)$$

là kiểu metric với $K = \sqrt[3]{4}$, do đó $(C_b(X), d, \sqrt[3]{4})$ là không gian kiểu metric. Chú ý rằng nếu a,b là hai số thực không âm, thì

$$(a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3) \text{ và } \sqrt[3]{a+b} \leq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}.$$

Điều này kéo theo